19　関数の値の変化

A

111

略解

(1)

$$f'(x)=(2x+\alpha)e^{-x}-(x^2+\alpha x+\beta)e^{-x}$$
$$=-\{x^2+(\alpha-2)x-\alpha+\beta\}e^{-x}$$
$$f''(x)=-(2x+\alpha-2)e^{-x}+\{x^2+(\alpha-2)x-\alpha+\beta\}e^{-x}$$
$$=\{x^2+(\alpha-4)x-2\alpha+\beta+2\}e^{-x}$$

(2)

必要十分条件は，$f'(x)=0$ の解すなわち $x^2+(\alpha-2)x-\alpha+\beta=0$ が異なる 2 実数解をもち，その 1 つの解が $x=1$ であることである。

異なる 2 実数解条件は判別式を D とすると $D>0$ より，

$D=(\alpha-2)^2-4(-\alpha+\beta)=\alpha^2-4\beta+4>0$

$x=1$ が解ならば $1+\alpha-2-\alpha+\beta=0$ すなわち $\beta=1$　・・・①

$\beta=1$ を判別式に代入して整理すると $\alpha^2>0$　$\therefore \alpha\neq 0$　・・・②

①，②より，条件は $\alpha\neq 0,\ \beta=1$

(3)

必要十分条件は $f''(x)=0$ の解すなわち $x^2+(\alpha-4)x-2\alpha+3=0$ が異なる 2 実数解をもち，その 1 つの解が $x=4$ であることである。

$x=4$ が解ならば $16+4(\alpha-4)-2\alpha+3=0$ すなわち $\alpha=-\dfrac{3}{2}$

このとき $x^2+(\alpha-4)x-2\alpha+3=0$ は $x^2-\dfrac{11}{2}x+6=0$ すなわち $\dfrac{1}{2}(2x-3)(x-4)=0$ となるから，$(4,\ f(4))$ は変曲点である。

以上より，$f(x)=\left(x^2-\dfrac{3}{2}x+1\right)e^{-x}$

$f'(x)=-\left(x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{5}{2}\right)e^{-x}=-\dfrac{1}{2}(x-1)(2x-5)e^{-x}$ より，

$x=1$ のとき極小値 $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{-1}$，　$x=\dfrac{5}{2}$ のとき極大値 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$

$f''(x)=\left(x^2-\dfrac{11}{2}x+6\right)e^{-x}=\dfrac{1}{2}(2x-3)(x-4)e^{-x}$ より，

変曲点は $\left(\dfrac{3}{2},\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $(4,\ f(4))=(4,\ 11e^{-4})$

112

$f(x)$ が極値をもたない条件は

すべての実数 x において $f'(x) \leq 0$ または $f'(x) \geq 0$ が成り立つことである。

本問の場合，$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x = -2\sin^2 x - \sin x + 1 + a$ より，

すべての実数 x において $-2\sin^2 x - \sin x + 1 + a \leq 0$ または $-2\sin^2 x - \sin x + 1 + a \geq 0$ が成り立てばよい。

(i) すべての実数 x において $-2\sin^2 x - \sin x + 1 + a \leq 0$ が成り立つための a の条件

$$a \leq 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ より，右辺は $\sin x = -\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{8}$ をとる。

よって，$a \leq -\dfrac{9}{8}$ であればよい。

(ii) すべての実数 x において $-2\sin^2 x - \sin x + 1 + a \geq 0$ が成り立つための a の条件

$$a \geq 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ より，右辺は $\sin x = 1$ のとき最大値 2 をとる。

よって，$a \geq 2$ であればよい。

(i)または(ii)より，求める a の値の範囲は $a \leq -\dfrac{9}{8}$ または $2 \leq a$

113

(1)

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 7 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{20}{3} > 0$ より，$f(x)$ は単調増加する。

したがって，$f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ。

また，その実数解 α は $f(-2) = -15 < 0,\ f(0) = 3 > 0$ より，$-2 < \alpha < 0$ を満たす。

(2)

$g(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1} = x + \dfrac{-4x + 2}{x^2 + 1}$ より，$\displaystyle\lim_{x \to \infty}\{g(x) - x\} = 0,\ \lim_{x \to -\infty}\{g(x) - x\} = 0$

よって，$y = g(x)$ の漸近線は $y = x$

(3)

$g(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1} = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^2 + 1}$ より，$y = g(x)$ と x 軸との共有点は $(-2,\ 0),\ (1,\ 0)$

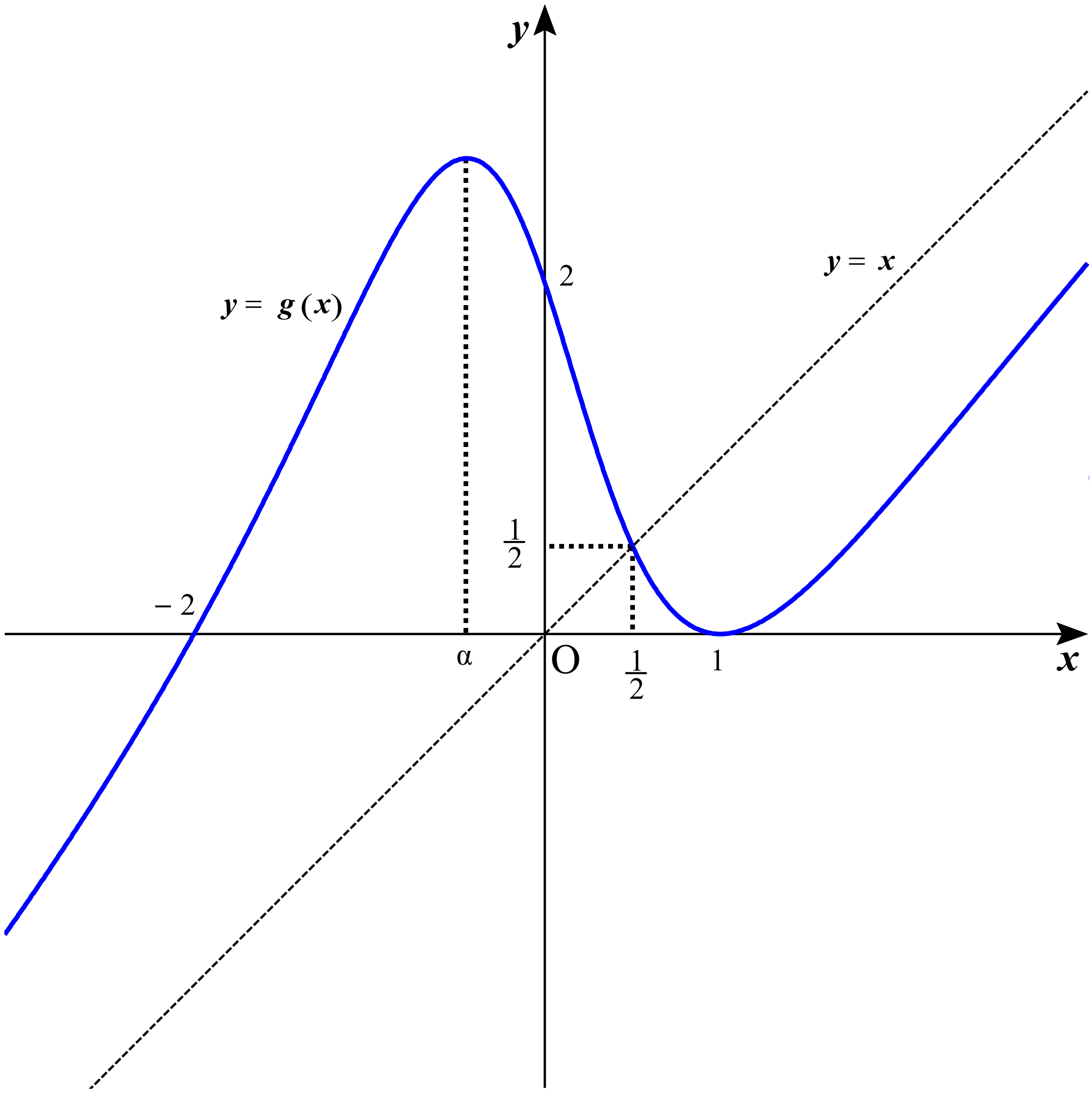
$g'(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 4x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{(x-1)(x^3 + x^2 + 7x + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{(x-1)f(x)}{(x^2 + 1)^2}$ より，$g'(1) = 0,\ g'(\alpha) = 0$

これと，$-2 < \alpha < 0,\ f(x)$ は単調増加関数より，

$g(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	0 極小	$\uparrow$

これと $y=x$ を漸近線にもつことから，グラフは下図のようになる。



114

(1)

$x = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4t^2 - 2$

$y = 2\cos 3\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 8t^3 - 6t$

(2)

$x = 4t^2 - 2$ より，$t = \pm\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$0 \le t \le 1$ および $x = 4t^2 - 2$ より，$t = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

よって，$y = 8\left(\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}\right)^3 - 6\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}}{2} = (x-1)\sqrt{x+2}$

$\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ のとき

$-1 \le t \le 0$ および $x = 4t^2 - 2$ より，$t = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

よって，$y = 8\left(-\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}\right)^3 - 6\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}\right) = -(x-1)\sqrt{x+2}$

(3)

$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = (x-1)\sqrt{x+2}$

また、定義域は、$0 \le t \le 1$ および $x = 4t^2 - 2$ より，$-2 \le x \le 2$

$\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ のとき

$y = -(x-1)\sqrt{x+2}$

また，定義域は，$-1 \le t \le 0$ および $x = 4t^2 - 2$ より，$-2 \le x \le 2$

よって，

$y = (x-1)\sqrt{x+2}\ (-2 \le x \le 2)$　・・・①

$y = -(x-1)\sqrt{x+2}\ (-2 \le x \le 2)$　・・・②

のグラフをかけばよいわけだが，①と②は x 軸に関して対称なグラフだから，

①の概形から曲線 C の概形が得られる。

そこで，①の増減と凹凸を調べることにする。

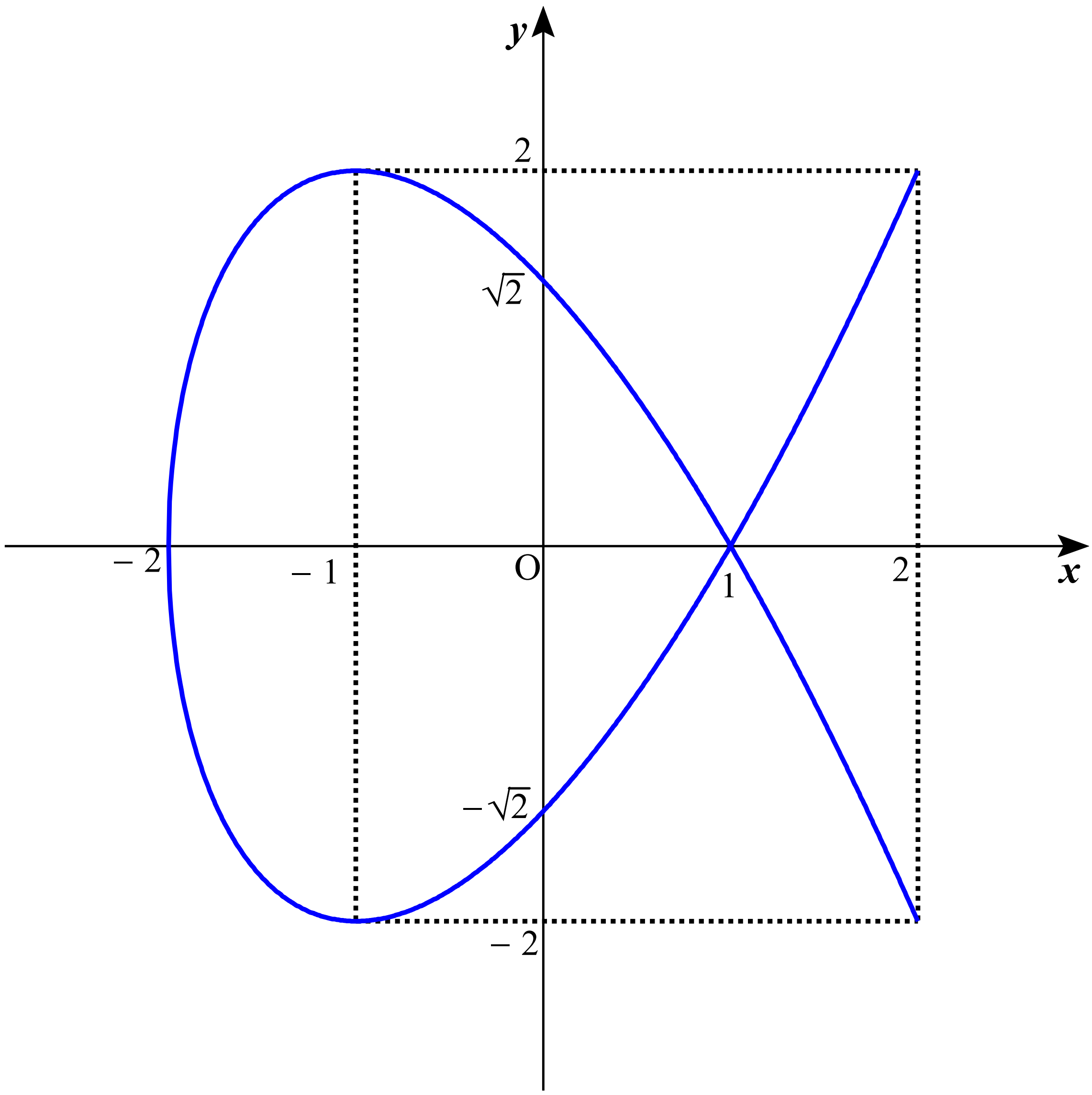
$y=(x-1)\sqrt{x+2}$ より，$y'=\sqrt{x+2}+\dfrac{x-1}{2\sqrt{x+2}}=\dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$

また，これより，$y''=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=\dfrac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$

よって，①の増減および凹凸は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
y'	/	$-$	0	$+$	/
y''	/	$+$	$+$	$+$	/
y	0	$\downarrow\cup$	-2	$\uparrow\cup$	2

①のグラフと②のグラフは x 軸に関して対称だから，曲線 C の概形は下図のようになる。



B

115

(1)

$f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+a\sin x+(2a-1)x$ より，$f'(x)=-\cos 2x+a\cos x+2a-1$

(2)

解法 1

$f(x)$ が極大値と極小値をもつための必要条件は,

$0<x<\pi$ において $f'(x)=0$ が異なる実数解を少なくとも 2 つもつことである。

そこで，まず必要条件を求める。

$f'(x)=-\cos 2x+a\cos x+2a-1$ より，$f'(x)=-2\cos^2 x+a\cos x+2a$

$f'(x)=0$ のとき，$-2\cos^2 x+a\cos x+2a=0$ より，$a=\frac{2\cos^2 x}{\cos x+2}$

よって，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解を少なくとも 2 つもつことと

直線 $y=a$ と曲線 $y=\frac{2\cos^2 x}{\cos x+2}$ が $0<x<\pi$ において少なくとも 2 つの共有点をもつことは

同値である

$y=\frac{2\cos^2 x}{\cos x+2}$ より，$y'=\frac{-2\sin x\cos x(\cos x+2)}{(\cos x+2)^2}$

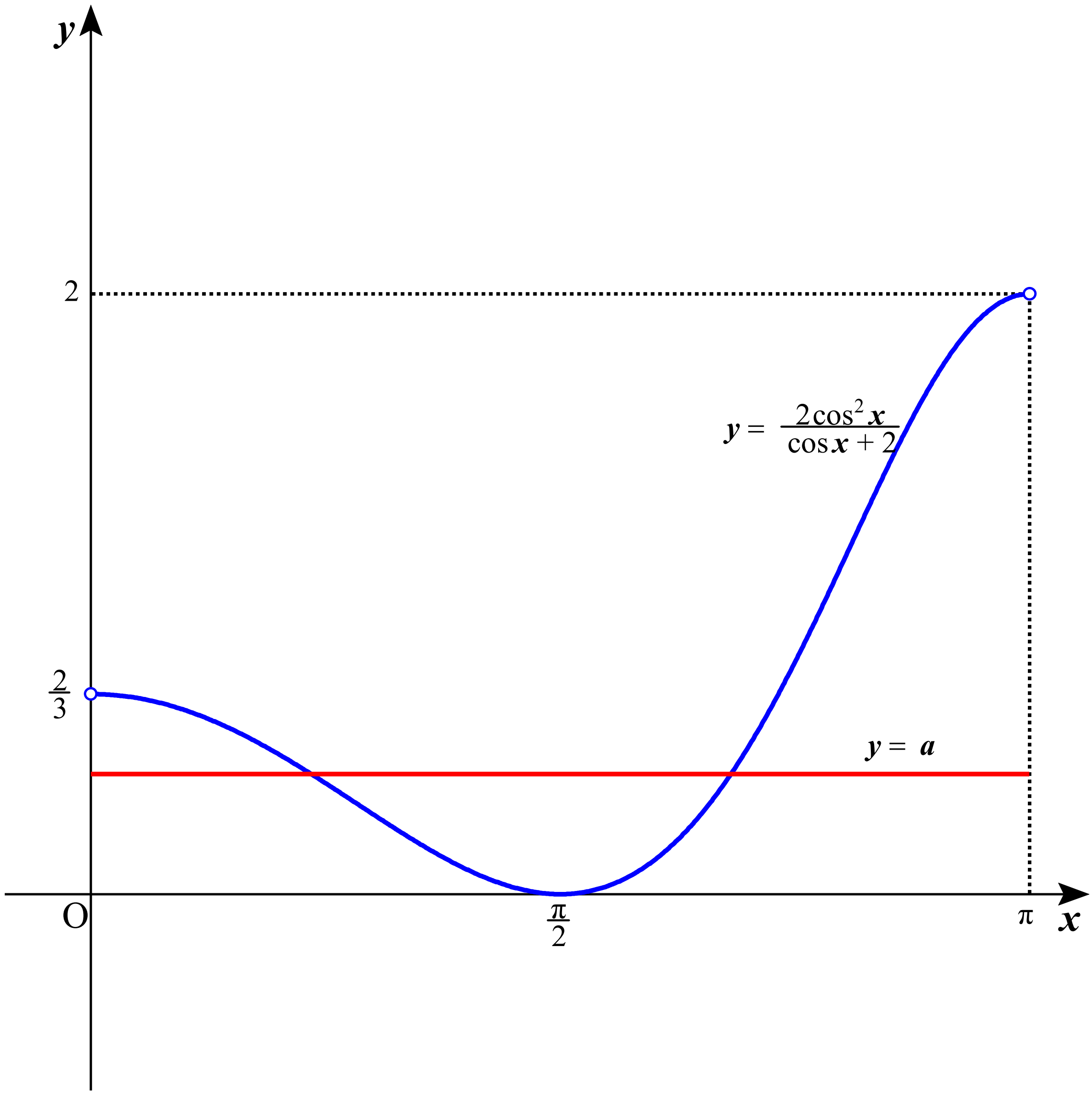
よって，$y=\frac{2\cos^2 x}{\cos x+2}$ （$0\leq x\leq\pi$）の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y'	/	$-$	0	$+$	/
y	$\frac{2}{3}$	↓	0	↑	2

ゆえに，a の必要条件は $0<a<\frac{2}{3}$

逆に $0<a<\frac{2}{3}$ とすると, $f'(x)=0$ を満たす異なる 2 つの x が存在し, それを α, β（$\alpha<\beta$）

とすると，$f(x)$ は $x=\alpha$ のとき極小値を，$x=\beta$ のとき極大値をとる。


y
2
2/3
O
π/2
π
x
y = 2cos²x / (cos x + 2)
y = a

解法 2

$f(x)$ が極大値と極小値をもつための必要条件は，
$0<x<\pi$ において $f'(x)=0$ が異なる実数解を少なくとも 2 つもつことである。
そこで，まず必要条件を求める。
$f'(x)=-\cos 2x+a\cos x+2a-1$ より， $f'(x)=-2\cos^2 x+a\cos x+2a$
$0<x<\pi$ より， $\cos x$ の値と x の値が 1 対 1 に対応するから，
$0<x<\pi$ において $f'(x)=0$ の異なる 2 実数解は高々2 つである。
したがって，$t=\cos x$ とおいたとき $-2t^2+at+2a=0$ が $-1<t<1$ において異なる 2 実数解をもつことと $0<x<\pi$ において $f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことは同値である。
$-1<t<1$ において $-2t^2+at+2a=0$ が異なる 2 実数解をもつための必要十分条件は，
$-2t^2+at+2a=0$ の判別式が正かつ $g(-1)<0$ かつ $g(1)>0$ が成り立つことである。
このとき，
判別式 $=a^2+16a=a(a+16)$ より， $a<-16,\ 0<a$　・・・①
$g(-1)=a-2$ より， $a<2$　・・・②
$g(1)=3a-2$ より， $a<\dfrac{2}{3}$　・・・③
①かつ②かつ③より， $0<a<\dfrac{2}{3}$

よって， $0<a<\dfrac{2}{3}$ ならば $f'(x)=0$ は $0<x<\pi$ において異なる 2 実数解をもつ。
このときの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，
$-1<t<\alpha,\ \beta<t<1$ のとき $-2t^2+at+2a<0$
$\alpha<t<\beta$ のとき $-2t^2+at+2a>0$
$\alpha=\cos p,\ \beta=\cos q$ とすると， $0<x<\pi$ において $\cos x$ は単調に減少するから， $p>q$
よって， $0<x<q,\ p<x<\pi$ のとき $f'(x)<0$， $q<x<p$ のとき $f'(x)>0$
ゆえに， $f(x)$ は $x=q$ のとき極小値を， $x=p$ のとき極大値をとる。
以上より，定数 a の値の範囲は $0<a<\dfrac{2}{3}$

(3)

$f''(x)=\sin x(4\cos x-a)$

$0<x<\pi$ のとき $\sin x>0$ より，

変曲点をもつための必要条件は $4\cos x=a$ を満たす x が存在すること，

すなわち定数 a の範囲が $-4<a<4$ であることである。

このときの変曲点の x 座標を α とすると， $\cos\alpha=\dfrac{a}{4}$

これと $f'(x)=-2\cos^2 x+a\cos x+2a$ および $f'(\alpha)=1$ より， $\dfrac{a^2}{8}+2a=1$ （$-4<a<4$）

よって， $a^2+16a-8=0$ （$-4<a<4$）　 $\therefore a=-8+6\sqrt{2}$

逆に， $a=-8+6\sqrt{2}$ ならば $\cos x=\dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4}$ を満たす x （$0<x<\pi$）が存在し，

この x を α とすると， $f'(\alpha)=1$， $f''(\alpha)=0$ かつ $x=\alpha$ の前後の $f''(x)$ 符号が異なる。

ゆえに， $a=-8+6\sqrt{2}$

116

(1)

$f'(x)=\dfrac{6x}{(2x^2+1)^2}$ だから， x が 0 以上のとき $f'(x)\geq 0$ より， $f(x)$ は単調増加する。

よって， $0<x<1$ ならば $f(0)<f(x)<f(1)$　すなわち $0<f(x)<1$

(2)

$f(x)-x=\dfrac{-x(2x-1)(x-1)}{2x^2+1}$ より， $f(x)-x=0$ のとき $x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

(3)

ポイント

$\lim_{n\to\infty}a_n=p$ （p は有限確定値）とすると， $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=p$

また， $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3{a_n}^2}{2{a_n}^2+1}=\dfrac{3p^2}{2p^2+1}$

よって， $\dfrac{3p^2}{2p^2+1}=p$　すなわち $\dfrac{-p(2p-1)(p-1)}{2p^2+1}=0$

したがって， $\lim_{n\to\infty}a_n=p$ （p は有限確定値）ならば， $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ より，

$\dfrac{1}{2}<\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<1$ となり， $p=1$ であることが予測できる。

ゆえに， $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を示せばよい。

しかし，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を直接示すのは難しいので，

$0 < 1 - a_n <$ 公比 $|r| < 1$ の等比数列　の不等式を導入することにより，

ハサミウチの原理から，$\lim_{n\to\infty}(1 - a_n) = 0$ を示せばよい。

解

(2)より，$\frac{1}{2} < x < 1$ ならば $f(x) > x$ が成り立つ。

よって，$f(\alpha) > \alpha > \frac{1}{2}$　すなわち $a_2 > a_1 > \frac{1}{2}$　・・・①

$n = k$ のとき $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_1 > \frac{1}{2}$ が成り立つと仮定すると，

(1)より，$f(x)$ は $x \geq 0$ において単調に増加するから，$f(a_k) > f(a_{k-1})$

これと $a_{k+1} = f(a_k)$，$a_k = f(a_{k-1})$ より，$a_{k+1} > a_k$　・・・②

よって，①，②より，$\frac{1}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ が成り立つ。

また，このとき $f(a_i) - a_i = a_{i+1} - a_i > 0$ （$i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$）が成り立つから，$\frac{1}{2} < a_i < 1$

ゆえに，$\frac{1}{2} < \alpha = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < 1$　・・・③

また，

$$
\begin{aligned}
1 - a_{n+1} &= 1 - f(a_n) \\
&= 1 - \frac{3a_n^2}{2a_n^2 + 1} \\
&= \frac{1 - a_n^2}{2a_n^2 + 1} \\
&= \frac{1 + a_n}{2a_n^2 + 1}(1 - a_n)
\end{aligned}
$$

ここで，$\frac{1 + a_n}{2a_n^2 + 1}$ が最大となるときの n を j とすると，

③より，$1 + a_j > 0$，$2a_j^2 + 1 > 0$，$2a_j^2 + 1 - (1 + a_j) = a_j(2a_j - 1) > 0$

よって，$0 < \frac{1 + a_j}{2a_j^2 + 1} < 1$

したがって，$0 < \frac{1 + a_j}{2a_j^2 + 1} \leq r < 1$ を満たすある r が存在する。

したがって，これと③から，$0<1-a_{n+1}\leq r(1-a_n)$が成り立つ。

よって，$0<1-a_n\leq r(1-a_{n-1})\leq r^2(1-a_{n-2})\leq\cdots\leq r^{n-1}(1-a_1)=r^{n-1}(1-\alpha)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n-1}(1-\alpha)=0$だから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

補足

$\dfrac{1+a_n}{2a_n{}^2+1}$について

$g(x)=\dfrac{1+x}{2x^2+1}$とおくと，$g'(x)=\dfrac{-2(x+1)^2+3}{(2x^2+1)^2}$

$-2(x+1)^2+3$は$x\geq-1$において単調に減少し，$x=\dfrac{1}{2}$のとき負だから，

$\dfrac{1}{2}<x<1$において，$g'(x)<0$

よって，$g(x)$は$\dfrac{1}{2}<x<1$において単調に減少する。

これと③より，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)>g(a_1)\geq\dfrac{1+a_n}{2a_n{}^2+1}>g(1)$

ゆえに，$\dfrac{2}{3}<\dfrac{1+a_n}{2a_n{}^2+1}\leq\dfrac{1+\alpha}{2\alpha^2+1}<1$